Απειροστικός Λογισμός Ι, 9/9/2019-Διδάσκων: Χρήστος Σαρόγλου

Επιλέξτε 10 από τις 11 μονάδες. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1ο. Δίνεται το σύνολο $X = \left\{1 - \frac{1}{n^3} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{1\}$.

i) [0.5 μον.] Να δειχθεί ότι το X είναι κλειστό.

ii) [0.5 μον.] Να βρεθούν τα $\sup A$, $\inf A$.

Θέμα 2ο. [1 μον.] Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to \mathbf{R}$, με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q} \cap [0, 2\pi) \\ \sin x, & x \in (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup [0, 2\pi) \end{cases}$
Να βρεθούν όλα τα σημεία του $[0, 2\pi)$ στα οποία η f είναι συνεχής.

Θέμα 3ο. Κάνοντας αποκλειστική χρήση του ορισμού του ορίου (για συναρτήσεις και ακολουθίες), να δειχθεί ότι

i) [0.5 μον.] $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

ii) [0.5 μον.] $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n^2+2} = 0$.

Θέμα 4ο. [1 μον.] Έστω $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $c \in (a, b)$. Αν $f'(c) > 0$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(c - \delta, c + \delta)$. Ισχύει το ίδιο αν υποτεθεί ότι $f'(c) \geq 0$ αντί για $f'(c) > 0$;

Θέμα 5ο.

i) [0.5 μον.] Να δειχθεί ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

ii) [1 μον.] Έστω $\{a_n\}$ μία συγκλίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Αν $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, να δειχθεί ότι το σύνολο τιμών $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ της $\{a_n\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

Θέμα 6ο. [1 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες

$$a_n = \sqrt[n]{2^n + \cos(1/n)5^n}, \qquad \beta_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^n}, \qquad \delta_n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^n$$

Θέμα 7ο. [1 μον.] Να εξεταστεί αν υπάρχουν τα όρια και αν υπάρχουν, να υπολογιστούν.

$$\lim_{x \to 0} x \sin(\ln(|\cos(1/x)| + 1)), \qquad \lim_{x \to \infty} e^{\cos x - 1}, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{5^x}{x^2}$$

Θέμα 8ο. [1 μον.] Έστω $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση (η f' δεν είναι απαραίτητα συνεχής). Αν $f'(a)f'(b) < 0$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Θέμα 9ο. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Να δειχθεί ότι

i) [0.5 μον.] Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(0) > 0$.

ii) [1 μον.] Η f δεν είναι αύξουσα σε καμμία περιοχή του μηδενός.

Θέμα 10ο. [1 μον.] Να βρεθούν όλα τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, με $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}$